

# 数学同学会

Math Classmates

我们只做一件事  
——让你喜欢数学。

怎么做？

高质量的玩数学。

# PART 01

## 高质量的玩数学三大宗旨

High quality mathematical experience



### 1. 玩游戏可以让孩子沉迷其中。

可以是简单的游戏，比如石头剪刀布；也可以是复杂的游戏，比如植物大战僵尸。孩子都喜欢游戏，都想要赢，而数学就是胜利的最可靠途径。你有没有梦想过，自己是一个能够预测未来的超人？买彩票随便中奖，考试自动知道答案，人生开挂，左右逢源？数学就是人类最接近能够预言未来的手段。带孩子多玩游戏，孩子自然会意识到数学在其中的决定性作用。我们会大量介绍到如何通过游戏，使用数学去“预测未来”的方法。

我们可以让孩子大量玩游戏，同时引导正确的游戏观：大胆假设新策略，小心求证已有策略；对策略举一反三进行变体，要对操作技术精益求精。

这种时候，孩子实际上已经踏入了数学的大门，从这里引导学习数学，并不是我们强迫的，而是孩子走向游戏胜利的不二法门。游戏本身就提供了例子、动机和应用。

### 2. 让我们帮孩子指出生活中无处不在的数学。

生活中有很多事情看似无关，比如台球和镜子，但它们都是符合入射角等于反射角的几何模型，波浪和音乐和颜色，竟然都是频率的体现。

数学的一个迷人的特点，就是它能把毫不关联的某些事情，建立一种本质性的关联。我们仅仅指出这种关联往往就足够吸引孩子了。

生活中就数学最好的例子、动机和应用。

### 3. 在数学活动中建立情感联结，让数学也变成亲友之间快乐的活动和回忆。

有没有人喜欢孤单一个人苦苦钻研数学呢？可能也是有的，但是孩子喜欢群体活动。如果我们经常和别人互动，一起开心地做一件事情，那么我们就更容易喜欢这件事情。从这个角度，互动游戏比如桌游，是完美的数学学习教具。通过这种方式，数学变成了陪伴，变成了亲子或者朋友之间快乐的回忆。

让孩子在懂和不懂的边界上反复研磨，来回横跳，这样就能极大地激发孩子的兴趣和成就感。

- 这的案例根植于日常生活，是他们平时可以接触到的，容易进入他们小脑瓜子的。
- 难度适中，循序渐进。太简单的内容并不能带给孩子胜任感，只能带来无聊，太困难的内容也只能带来沮丧。循序渐进就是通过我们老师和家长的观察，找到孩子的认知边界，也就是说，找到孩子能和不能，懂和不懂的这个边界线，然后通过引导，帮助孩子日拱一卒，让思维蔓延生长。
- 每个主题我们都要准备合适的例子、动机和应用，目的是激发他们的自主探索，并且他们自己对这个能力被加持的过程是有感知的。

【举个例子】G01：假设有一个灯，你按一下开关，它会改变状态，比如按一下是开，按两下是关（也可以相反，看你约定从哪里开始计算）那么按三下开关，它是什么状态？四下呢？五下呢？小孩（任何人）用拼凑法都可以得出正确的答案，不需要数学知识。但是如果你直接问按100下呢？101下呢？这时候拼凑法就失效了。必须要寻找下规律了，这时候数学知识就要上场了。

假设他了解了奇偶数，那么只要看一眼，就可以将答案脱口而出。（如果是几个人一起玩）是不是被数学武装过的你，威力就增加了，变厉害了？

如果仅仅是给你一个案例，你是不是不会玩？但是如果我们这样给你解释说明过了，你是不是觉得做起来很容易？

# PART 02

课程大纲:

10个单元, 38节小课

Outline





# 老师简介、知识储备简介

*How to learn math*

## 【杨一龙老师简介】

25岁博士毕业任教于清华大学数学系，清华本科生使用的线性代数教材的作者，丘成桐少年班（类似数学天才班）老师。在美留学时是数学大师陶哲轩的博士生。

## 【开始本课程学习前，你需要已经具备哪些基础知识？】

- 已经学会数数了
- 知道数量1-9 的概念
- 知道左右的概念
- 知道基本的几何图形：三角形，正方形，长方形和圆形。
- 有过玩游戏的经验，真人游戏、桌游或ipad游戏都可以。

# I 石头剪刀布

Rock-paper-scissors

## 【教学动机】

- 数学不是数字，数学不是计算，数学不是逻辑。
- 那么数学是什么呢？
- 这一单元，希望通过切实的体验，让孩子们对“数学”这件事情有一个基本的认识。

## 【学习目标】

- 让孩子开始了解数学，喜欢上数学

## 【对应年级】

- 目前课内没有对应内容，但是实际上是数学启蒙的很重要的环节。

(备注：该部分设计的难度梯度较大，低年级适合看1-3集，高年级到成人适合看2-4集。)

## 【课程内容】

### 1. 剪刀石头布的介绍 (难度: ★)

- 简单的规则介绍

### 2. 制定石头剪刀布的策略 (难度: ★★)

- 已知对手的规律，如何找到胜利的策略呢？

### 3. 剪刀石头布的策略互动 (难度: ★★★)

- 双方各选不同的策略，会怎么样呢？

### 4. 剪刀石头布的变体 (难度: ★★★★)

- 如果我们增加或改变游戏的规则，会怎么样呢？

# II—一对应

One-to-one correspondence

## 【教学动机】

• 数是什么意思？数数如何进行？这两个本身都不重要。重要的是，它们背后都在指明一种“关系”。在生活中和数学中，具体的数数和结果并不重要（AI已经可以做了），但是数数时我们建立的“关系”是非常重要的。

## 【学习目标】

• 了解一一对应的关系，并且能从多种角度（数字对应，多感官对应，几何对应）建立这些关系

## 【对应年级】

• 小学一年级，数是什么

## 【课程内容】

### 5. 一一对应的介绍（难度：★★）

- 一一对应的简单介绍

### 6. 变异的一一对应（难度：★★）

- 一一对应的推广情况

### 7. 几何的一一对应（难度：★★★）

- 对应的几何版本



# III 数是什么

What's numbers?

## 【教学动机】

• 我们这一单元正式介绍“数是什么”，以及简单的加法，尤其强调数的桥梁性和策略性。

## 【学习目标】

• 认识到数的本质——数是一种一一对应的策略，一种万能桥梁

## 【对应年级】

• 小学一年级，“数是什么”，简单加法

## 【课程内容】

8. 一一对应的万能桥梁（难度：★）

● 理解数的作用

9. 乱序数数和速认 (*subitize*)（难度：★）

● 我们确认数量时，隐藏了哪些规律？

10. 数量、顺序和加法（难度：★）

● 这三者的关系到底是什么？

11. 数和数的一一对应（难度：★★★）

● 我们发明数是为了服务一一对应，结果数里面也有一一对应！

# IV 下一个数和比大小

Next numbers?

## 【教学动机】

• 一生二、二生三、三生万物。我们常见的许多数学题目（比如100以内数字比大小），都有很简单的判断方法，但是这些判断方法是怎么来的呢？这里面有两个最重要的数学思想，就是递推和化简。我们希望通过诸如“一个数的下一个数是几”和“两个数哪个更大”这些简单的问题，来体会一下这些重要的数学思想。

## 【学习目标】

• 初级目标是学会判断“一个数的下一个数是几”和“两个数哪个更大”这些简单的问题，高级目标是体验递推和化简的数学思想。

## 【对应年级】

• 核心思想是高中二年级的数学归纳法，但是内容是一年级下学期的100以内数字比大小。

## 【课程内容】

### 12. 进位（难度：★★）

● 通过进位，我们的交流可以更清楚。

### 13. 化简和递推（难度：★★★）

● 通过“下一个数是几”这个问题，我们体验一下数学中最重要的两个思想：化简和递推

### 14. 递推之后的规律整合（难度：★★★）

● 通过“下一个数是几”这个问题，我们发现一步登天是可能的，捷径是存在的，关键还是要找规律。

### 15. 数学分析入门：比大小（难度：★★★）

● 通过“两个数比大小”这个问题，我们初步体验一下“数学分析”这个学科

### 16. 从左往右算的加法竖式（难度：★★）

● 加法竖式熟练是没用的。学会发明加法竖式才是关键。

# V 魔塔和等差数列

*Magic tower & arithmetic sequence*

## 【教学动机】

• 玩游戏的时候，最常见的数学就是等差数列。我们希望通过玩魔塔游戏，让学生们有大量观察等差数列的机会，并且开始洞察一些数学规律。

## 【学习目标】

• 理解等差数列

## 【对应年级】

• 二年级，100以内加减法

## 【课程内容】

17. 魔塔战斗公式（难度：★★★）

● 搞清楚魔塔游戏的战斗公式

18. 等差数列（难度：★★）

● 通过观察魔塔游戏的规律，了解等差数列

19. 两个等差数列之间的运算（难度：★★）

● 简单讨论了减法，并且讨论了多个等差数列之间的对应规律。

20. 魔塔中的抉择（难度：★★）

● 运用之前学到的规律，搞清楚魔塔游戏中如何进行选择。

**【教学动机】**

•对数学的认知越孤立、越静态，就越无聊。对数学的认知越强调联系和变化，就越有趣。整数（正数、负数）的本质就是描述各种变化，而通过探究这些变化，我们就可以初步体验代数现象和几何现象。

**【学习目标】**

•整数和加法的基本运算律

**【对应年级】**

•二年级（减法）和六年级（负数）

**【课程内容】**

21. 整数和方向（难度：★）

● 介绍正负的概念

22. 变化的复合和交换（难度：★★）

● 多几个、少几个，这类变化之间的复合和交换，有什么规律呢？

23. 整数变化的拓展（难度：★★）

● 进行一些相关的有趣讨论

24. 交换律的成功和失败（难度：★★）

● 减法等操作没有交换律，为什么？

**【教学动机】**

• 下棋的核心是要同时思考好几步。数学也往往需要我们同时思考好几个数，也就是数组。其实加法竖式的本质就是数组运算，但是我们仔细剖析却会发现，数组同时还对应着一种描述几何的思路，就是坐标系。我们通过大量的例子，可以发现数组、几何、统计，居然可以统一成一类现象！

**【学习目标】**

• 熟悉数组和坐标系的概念和简单的运算

**【对应年级】**

• 小学一年级，加法竖式；初一下半学期，坐标系。

**【课程内容】****25. 数组加法和桌游（难度：★）**

● 我们讨论了简单的数组加法，以及在卡坦岛、城堡牌这类游戏中的应用

**26. 数组和坐标系（难度：★★）**

● 我们从数组的思路，引出了平面直角坐标系，发现数组、几何、统计，居然可以统一成一类现象！

**27. 坐标系和曲线（难度：★★★）**

● 我们继续看更多的坐标系的应用，包括心情曲线，学习和时间、金钱的关系，经济学中的供需曲线等例子。

**【教学动机】**

• 乘法的计算并不是我们这里的重点。乘法这种现象本身，才是我们这单元的核心。点阵是乘法，书架的格子数量是乘法，影子分身是乘法，甚至几何图形都可以进行乘法。通过对各种例子的探索和讨论，我们希望学生可以在直觉上明白乘法是一种什么样的现象，并且充分享受乘法的乐趣。

**【学习目标】**

• 了解乘法

**【对应年级】**

• 二年级，简单乘法

**【课程内容】**

## 28. 点阵乘法（难度：★）

• 我们面临了一个新问题：如何数点阵中的点？这种数数需要一个新策略，就是乘法。注意， $2 \times 3 = 6$ 这个答案并不重要。重要的是，你能否在生活中发现 $2 \times 3$ 这样的结构？

## 29. 乘法与影子分身（难度：★★）

• 我们通过一些具体的点阵数数，初步探索一些乘法的简单规律。特别重要的规律是，乘法是一种“影子分身”的魔法。注意，探索的过程比探索的结果更加重要。

## 30. 几何乘法（难度：★★★）

• 线段乘以线段等于什么？线段乘以圆盘等于什么？圆周乘以圆周等于什么？我们这里推广了乘法的概念，来看一些好玩的几何图形中的乘法。

**【教学动机】**

•我们已经简单认识了加法和乘法。稍作总结，就会发现许许多多运算律，比如交换律，结合律，分配率。但是世界上有无数的运算方法，它们都有什么运算律呢？“吃”有交换律吗？“穿衣服”有结合律吗？这些都值得我们好好探索一下。

**【学习目标】**

•了解括号，运算律，以及整数乘法

**【对应年级】**

•四年级，括号和运算律；六年级，负数

**【课程内容】****31. 括号与运算律（难度：★★）**

•我们探索了括号和乘法分配率。咦，但是“吃”也满足分配率！“吃”满足交换律吗？

**32. 自定义运算的运算律（难度：★★★）**

•我们探索了更多的不同运算的运算律，包括我自己随意定义的“框”运算，“穿衣服”运算，以及一些加法和乘法的特殊元素运算律。

**33. 整数乘法（难度：★★★）**

•负数怎么进行乘法呢？假设我们是数学家，我们已经总结的运算律，通过探索和找规律，就发现，如果我们来定义的话，就必须如此这般地定义负数的乘法。神奇的是，乘以-1竟然是几何上的反射操作！

# X 乘法的进阶

Advanced multiplication

## 【教学动机】

• 我们进一步探索乘法中的各种现象，包括几何定义、公理定义，Cavalieri面积原理，单位换算，单位的乘法，二进制等等内容。

## 【学习目标】

• 通过大量的应用和视角，进一步构建关于乘法的直觉理解。

## 【对应年级】

• 二年级，长度单位；三年级，乘法竖式，面积单位；五年级，体积单位；高中/大一，Cavalieri原理。

## 【课程内容】

34. 乘法的几何定义，乘法的公理定义（难度：★ ★ ★ ★）
- 我们见识两个新的定义乘法的方法。原来乘法在几何上恰恰对应着拉伸和反射，而另一方面，也可以仅仅从几条公理出发，就定义出了一样的乘法
35. 数数和单位换算中的乘法（难度：★★）
- 实际上，不了解乘法，我们是没法数数的。我们这里把数数、乘法、数组加法、乘法分配率、单位换算，全部都可以结合起来，它们竟然全部都是同一件事情！
36. 面积和Cavalieri原理（难度：★★★）
- 我们从几何乘法出发，探索面积的定义方法，再通过观察得到Cavalieri原理
37. 单位加法和乘法，不同进制（难度：★★★）
- 我们把乘法和加法运用到单位的计算上，并且探求一下二进制等等不同的进制概念
38. 乘法分配率和乘法竖式（难度：★★★）
- 我们讨论一下乘法的具体计算方法。注意，方法本身不重要，如何根据运算律，发明这些方法，才是核心。



# PART 03

怎么加入一起玩

How to play together





# 怎么加入？

How to join?



学费1099元，可以获得：

- 1) 杨一龙老师的这一整套视频课程。
  - 2) 如果持续学习并分享自己的学习情况，将获得200元奖学金。
- 数学同学会，是一个跨龄数学学习共同体。提供高质量的数学学习体验，让大家爱上数学，研究数学，为生活所用。

爱, 智慧

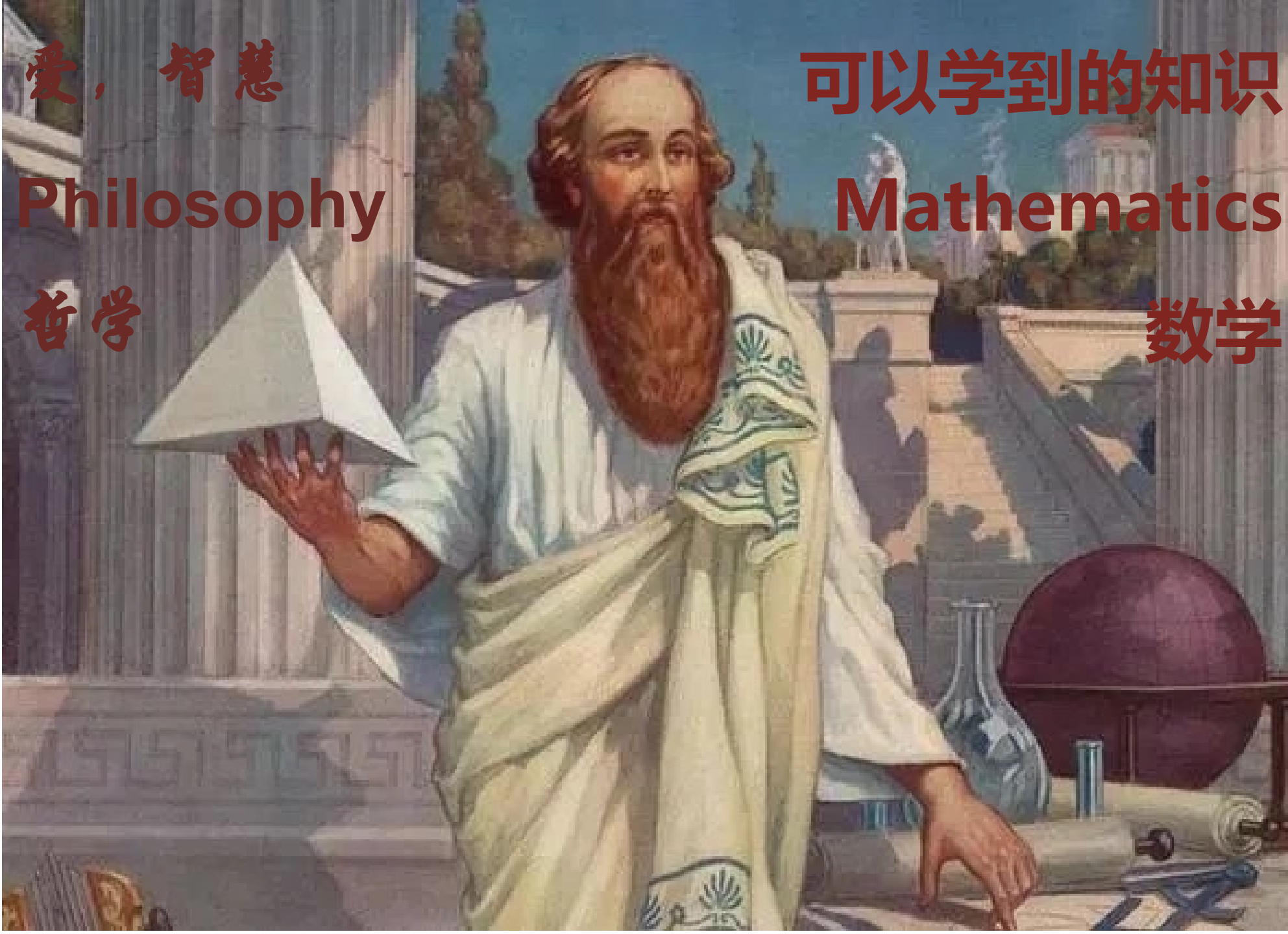
Philosophy

哲学

可以学到的知识

Mathematics

数学





Thanks

高质量的玩数学

○数学同学会