



○ 数学同学会
Math Classmates

我们只做一件事
——让你喜欢数学。
怎么做？
高质量的玩数学。

PART 02
课程大纲:
10个单元, 38节小课

Outline





老师简介、知识储备简介

How to learn math

【杨一龙老师简介】

25岁博士毕业任教于清华大学数学系，清华本科生使用的线性代数教材的作者，丘成桐少年班（类似数学天才班）老师。在美留学时是数学大师陶哲轩的博士生。

【开始本课程学习前，你需要已经具备哪些基础知识？】

- 已经学会数数了
- 知道数量1-9 的概念
- 知道左右的概念
- 知道基本的几何图形：三角形，正方形，长方形和圆形。
- 有过玩游戏的经验，真人游戏、桌游或ipad游戏都可以。

I 石头剪刀布

Rock-paper-scissors

【教学动机】

- 数学不是数字，数学不是计算，数学不是逻辑。
- 那么数学是什么呢？
- 这一单元，希望通过切实的体验，让孩子们对“数学”这件事情有一个基本的认识。

【学习目标】

- 让孩子开始了解数学，喜欢上数学

【对应年级】

- 目前课内没有对应内容，但是实际上是数学启蒙的很重要的环节。

（备注：该部分设计的难度梯度较大，低年级适合看1-3集，高年级到成人适合看2-4集。）

【课程内容】

1. 剪刀石头布的介绍（难度：★）
 - 简单的规则介绍
2. 制定石头剪刀布的策略（难度：★★）
 - 已知对手的节奏，如何找到胜利的策略呢？
3. 剪刀石头布的策略互动（难度：★★★）
 - 双方各选不同的策略，会怎么样呢？
4. 剪刀石头布的变体（难度：★★★★）
 - 如果我们增加或改变游戏的规则，会怎么样呢？

II—一对应

One-to-one correspondence

【教学动机】

• 数是什么意思？数数如何进行？这两个本身都不重要。重要的是，它们背后都在指明一种“关系”。在生活中和数学中，具体的数数和结果并不重要（AI已经可以做了），但是数数时我们建立的“关系”是非常重要的。

【学习目标】

• 了解一一对应的关系，并且能从多种角度（数字对应，多感官对应，几何对应）建立这些关系

【对应年级】

• 小学一年级，数是什么

【课程内容】

5. 一一对应的介绍（难度：★★）

- 一一对应的简单介绍

6. 变异的一一对应（难度：★★）

- 一一对应的推广情况

7. 几何的一一对应（难度：★★★）

- 对应的几何版本

III 数是什么

What's numbers?

【教学动机】

• 我们这一单元正式介绍“数是什么”，以及简单的加法，尤其强调数的桥梁性和策略性。

【学习目标】

• 认识到数的本质——数是一种一一对应的策略，一种万能桥梁

【对应年级】

• 小学一年级，“数是什么”，简单加法

【课程内容】

8. 一一对应的万能桥梁（难度：★）

- 理解数的作用

9. 乱序数数和速认（subitize）（难度：★）

- 我们确认数量时，隐藏了哪些规律？

10. 数量、顺序和加法（难度：★）

- 这三者的关系到底是什么？

11. 数和数的一一对应（难度：★★★）

- 我们发明数是为了服务一一对应，结果数里面也有一一对应！

IV 下一个数和比大小

Next numbers?

【教学动机】

• 一生二、二生三、三生万物。我们常见的许多数学题目（比如100以内数字比大小），都有很简单的判断方法，但是这些判断方法是怎么来的呢？这里面有两个最重要的数学思想，就是递推和化简。我们希望通过诸如“一个数的下一个数是几”和“两个数哪个更大”这些简单的问题，来体会一下这些重要的数学思想。

【学习目标】

• 初级目标是学会判断“一个数的下一个数是几”和“两个数哪个更大”这些简单的问题，高级目标是体验递推和化简的数学思想。

【对应年级】

• 核心思想是高中二年级的数学归纳法，但是内容是一年级下学期的100以内数字比大小。

【课程内容】

12. 进位（难度：★★）

• 通过进位，我们的交流可以更清楚。

13. 化简和递推（难度：★★★）

• 通过“下一个数是几”这个问题，我们体验一下数学中最重要的两个思想：化简和递推

14. 递推之后的规律整合（难度：★★★）

• 通过“下一个数是几”这个问题，我们发现一步登天是可能的，捷径是存在的，关键还是要找规律。

15. 数学分析入门：比大小（难度：★★★）

• 通过“两个数比大小”这个问题，我们初步体验一下“数学分析”这个学科

16. 从左往右算的加法竖式（难度：★★）

• 加法竖式熟练是没用的。学会发明加法竖式才是关键。

V 魔塔和等差数列

Magic tower & arithmetic sequence

【教学动机】

• 玩游戏的时候，最常见的数学就是等差数列。我们希望通过玩魔塔游戏，让学生们有大量观察等差数列的机会，并且开始洞察一些数学规律。

【学习目标】

• 理解等差数列

【对应年级】

• 二年级，100以内加减法

【课程内容】

17. 魔塔战斗公式（难度：★★★）

• 搞清楚魔塔游戏的战斗公式

18. 等差数列（难度：★★）

• 通过观察魔塔游戏的规律，了解等差数列

19. 两个等差数列之间的运算（难度：★★）

• 简单讨论了减法，并且讨论了多个等差数列之间的对应规律。

20. 魔塔中的抉择（难度：★★）

• 运用之前学到的规律，搞清楚魔塔游戏中如何进行选择。

VI 整数和正负

Integer, positive, negative

【教学动机】

•对数学的认知越孤立、越静态，就越无聊。对数学的认知越强调联系和变化，就越有趣。整数（正数、负数）的本质就是描述各种变化，而通过探究这些变化，我们就可以初步体验代数现象和几何现象。

【学习目标】

•整数和加法的基本运算律

【对应年级】

•二年级（减法）和六年级（负数）

【课程内容】

21. 整数和方向（难度：★）

• 介绍正负的概念

22. 变化的复合和交换（难度：★★）

• 多几个、少几个，这类变化之间的复合和交换，有什么规律呢？

23. 整数变化的拓展（难度：★★）

• 进行一些相关的有趣讨论

24. 交换律的成功和失败（难度：★★）

• 减法等等操作没有交换律，为什么？

VII 数组和坐标系

Array & Coordinate System

【教学动机】

• 下棋的核心是要同时思考好几步。数学也往往需要我们同时思考好几个数，也就是数组。其实加法竖式的本质就是数组运算，但是我们仔细剖析却发现，数组同时还对应着一种描述几何的思路，就是坐标系。我们通过大量的例子，可以发现数组、几何、统计，居然可以统一成一类现象！

【学习目标】

• 熟悉数组和坐标系的概念和简单的运算

【对应年级】

• 小学一年级，加法竖式；初一下半学期，坐标系。

【课程内容】

25. 数组加法和桌游（难度：★）

• 我们讨论了简单的数组加法，以及在卡坦岛、城堡牌这类游戏中的应用

26. 数组和坐标系（难度：★★）

• 我们从数组的思路，引出了平面直角坐标系，发现数组、几何、统计，居然可以统一成一类现象！

27. 坐标系和曲线（难度：★★★）

• 我们继续看更多的坐标系的应用，包括心情曲线，学习和时间、金钱的关系，经济学中的供需曲线等例子。

【教学动机】

• 乘法的计算并不是我们这里的重点。乘法这种现象本身，才是我们这单元的核心。点阵是乘法，书架的格子数量是乘法，影子分身是乘法，甚至几何图形都可以进行乘法。通过对各种例子的探索和讨论，我们希望学生可以在直觉上明白乘法是一种什么样的现象，并且充分享受乘法的乐趣。

【学习目标】

• 了解乘法

【对应年级】

• 二年级，简单乘法

【课程内容】**28. 点阵乘法 (难度：★)**

• 我们面临了一个新问题：如何数点阵中的点？这种数数需要一个新策略，就是乘法。注意， $2 \times 3 = 6$ 这个答案并不重要。重要的是，你能否在生活中发现 2×3 这样的结构？

29. 乘法与影子分身 (难度：★★)

• 我们通过一些具体的点阵数数，初步探索一些乘法的简单规律。特别重要的规律是，乘法是一种“影子分身”的魔法。注意，探索的过程比探索的结果更加重要。

30. 几何乘法 (难度：★★★)

• 线段乘以线段等于什么？线段乘以圆盘等于什么？圆周乘以圆周等于什么？我们这里推广了乘法的概念，来看一些好玩的几何图形中的乘法。

【教学动机】

• 我们已经简单认识了加法和乘法。稍作总结，就会发现许许多多运算律，比如交换律，结合律，分配率。但是世界上有无数的运算方法，它们都有什么运算律呢？“吃”有交换律吗？“穿衣服”有结合律吗？这些都值得我们好好探索一下。

【学习目标】

• 了解括号，运算律，以及整数乘法

【对应年级】

• 四年级，括号和运算律；六年级，负数

【课程内容】

31. 括号与运算律（难度：★★）

• 我们探索了括号和乘法分配率。咦，但是“吃”也满足分配率！“吃”满足交换律吗？

32. 自定义运算的运算律（难度：★★★）

• 我们探索了更多的不同运算的运算律，包括我自己随意定义的“框”运算，“穿衣服”运算，以及一些加法和乘法的特殊元素运算律。

33. 整数乘法（难度：★★★）

• 负数怎么进行乘法呢？假设我们是数学家，我们已经总结的运算律，通过探索和找规律，就发现，如果我们来定义的话，就必须如此这般地定义负数的乘法。神奇的是，乘以-1竟然是几何上的反射操作！

X 乘法的进阶

Advanced multiplication

【教学动机】

• 我们进一步探索乘法中的各种现象，包括几何定义、公理定义，Cavalieri面积原理，单位换算，单位的乘法，二进制等等内容。

【学习目标】

• 通过大量的应用和视角，进一步构建关于乘法的直觉理解。

【对应年级】

• 二年级，长度单位；三年级，乘法竖式，面积单位；五年级，体积单位；高中/大一，Cavalieri原理。

【课程内容】

34. 乘法的几何定义，乘法的公理定义（难度：★ ★ ★ ★）

• 我们见识两个新的定义乘法的方法。原来乘法在几何上恰恰对应着拉伸和反射，而另一方面，也可以仅仅从几条公理出发，就定义出了一样的乘法

35. 数数和单位换算中的乘法（难度：★★）

• 实际上，不了解乘法，我们是没法数数的。我们这里把数数、乘法、数组加法、乘法分配率、单位换算，全部都可以结合起来，它们竟然全部都是同一件事情！

36. 面积和Cavalieri原理（难度：★★★）

• 我们从几何乘法出发，探索面积的定义方法，再通过观察得到Cavalieri原理

37. 单位加法和乘法，不同进制（难度：★★★）

• 我们把乘法和加法运用到单位的计算上，并且探求一下二进制等等不同的进制概念

38. 乘法分配率和乘法竖式（难度：★★★）

• 我们讨论一下乘法的具体计算方法。注意，方法本身不重要，如何根据运算律，发明这些方法，才是核心。



Thanks

高质量的玩数学

0数学同学会