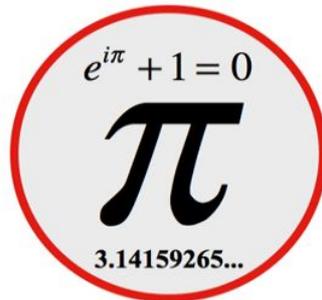


数学活动



★内部资料 • 注意保存★

求和

2023年3月4日

数学是科学之王.

——高斯.

1 一些问题

问题 1.1 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5}$

问题 1.2 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$

问题 1.3 请问 $\frac{1}{n \times (n+1)}$ 与 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 相等吗? 说明理由(每一步的依据)。你能推广它吗?

问题 1.4 计算 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ (n 是大于0的自然数)

问题 1.5 请你找一个数 A , 满足下面的式子成立(也就是说使得下面的不等式成立)

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} < A$$

(n 是大于0的自然数)

问题 1.6 请你比较 $\frac{1}{2022 \times 2023}$ 和 $\frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$ 的大小。说明你的理由。

问题 1.7 请你比较 $\frac{1}{n(n+1)}$ 和 $\frac{1}{n \times n}$ 的大小。说明你的理由。

问题 1.8 请你找一个数 A , 满足下面的式子成立(也就是说使得下面的不等式成立)

$$\frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{4 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times n} < A$$

(n 是大于0的自然数。注意: 是对每个 n 都成立)可以和你的朋友或家人分享这个问题, 看看谁找到的 A 更小。

问题 1.9 请你根据上述问题, 提出新的问题, 比如:

(1) 请你找一个数 A , 满足下面的式子成立(也就是说使得下面的不等式成立)

$$\frac{1}{1 \times 1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} + \frac{1}{4 \times 4 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times n \times n} < A$$

(n 是大于0的自然数。注意: 是对每个 n 都成立)

(2) 下面的式子, 可以无限加下去吗? 是一个数吗? 能算出来吗?

$$\frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{4 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times n} + \cdots$$

提的问题越多越好! 期待分享你的提问。

问题 1.10 根据上面的材料, 可以写一篇数学日记(小论文), 谈谈自己的看法或总结, 包括提出的问题(自己看看能否给出解答)等等。

如何计算下面的分数之和呢? 请研究一下, 看看可否找到什么规律。尝试说明理由。

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100}$$

接下来, 请研究下面的分数之和与2的大小关系

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}$$

最后, 请你也提出类似问题, 尝试探究一些。记录你的问题、思考、发现。

问题 1.11

B组作业

下面这个问题很有挑战性,请先回忆我们上节课所讲内容,然后作答。请问

$$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \cdots + \frac{1}{2023^5}$$

和 $\frac{25}{24}$ 哪个大?说明你的理由。

2 无穷级数求和

问题 2.1 计算

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots$$

问题 2.2 计算

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots$$

问题 2.3 计算

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \cdots$$

问题 2.4 计算

$$\frac{5}{24} + \frac{5}{24^2} + \frac{5}{24^3} + \frac{5}{24^4} + \frac{5}{24^5} + \cdots$$

3 总结

在这次主题中, 我们学习了裂项求和方法。利用这个方法, 我们可以估计一些数列和的值。还介绍了一些世界难题。比如我们还不知道下列数是不是分数, 也没有计算出它的和

$$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \cdots + \frac{1}{2023^5} + \cdots$$

类似的有很多问题, 这些问题, 大家可以有一个印象, 也许, 它在等待着你去解决……